

# Epreuve de mathématiques

## Serie C

### 03H00

#### Exercice 1: 12 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne les points:  
 $A(2, 1, 3); B(-3, -1, 7); C(3, 2, 4)$

1. Montrer que les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés. (1 pt)
2. Soit  $(D)$  la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

- a) Montrer que la droite  $(D)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$  (1 pt)
  - b) Donner une équation du plan  $(ABC)$  (1 pt)
3. Soit  $H$  le point commun à la droite  $(D)$  et au plan  $(ABC)$ 
    - a) Déterminer les coordonnées du point  $H$ . (1 pt)
    - b) Vérifier que  $H$  est le barycentre de  $(A; -2), (B; -1), (C; 2)$  (1 pt)
    - c) Déterminer et préciser la nature de l'ensemble  $\Gamma_1$  des points  $M$  de l'espace tels que:

$$(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}) \cdot (\vec{MB} - \vec{MC}) = 0 \quad (2pts)$$

- d) Déterminer la nature de l'ensemble  $\Gamma_2$  des points  $M$  de l'espace tels que:

$$\| -2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29} \quad (2pts)$$

- e) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$  (2 pts)
- f) Le point  $S(-8, 1, 3)$  appartient-il à  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ ? (1 pt)

#### Exercice 2: 12 points

I. On admet le résultat suivant:

**Si  $p$  est premier et  $a$  un entier non divisible par  $p$ , alors  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$**

1. Démontrer que 193 est un nombre premier. (2 pts)
2. Montrer que, quel que soit l'entier non nul  $a$  inférieur à 192,  $a^{192} \equiv 1 \pmod{193}$  (1 pt)

II. On considère l'équation  $(E): 83x - 192y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

1. Montrer que le couple  $(155, 67)$  est solution. (1 pt)
2. Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$ . (1 pt)

III. On note  $A$  l'ensemble des 193 entiers naturels  $a$  tels que  $a \leq 192$

On définit deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $A$  dans  $A$  de la manière suivante:

- Si  $a \in A$ ,  $f(a)$  est le reste de la division euclidienne de  $a^{83}$  par 193
  - Si  $a \in A$ ,  $g(a)$  est le reste de la division euclidienne de  $a^{155}$  par 193
1. Vérifier que  $g(f(0)) = 0$  (**1 pt**)
  2. Démontrer que  $g(f(a)) \equiv a^{83 \times 155} \pmod{193}$  (**2 pts**)
  3. En déduire que, quel que soit l'entier non nul  $a$  de  $A$ ,  $g(f(a)) = a$  (Utiliser la partie II) (**2 pts**)
  4. Déterminer  $f \circ g$  (**2 pts**)

## Problème: 26 points

I. On considère l'équation différentielle  $(E)$  :  $y'' + 2y' + y = -2e^{-x}$

1. Déterminer  $a \in \mathbb{R}$  de telle sorte que la fonction  $U$  telle que  $U(x) = ax^2e^{-x}$  soit solution de  $(E)$ . (**1 pt**)
2. Résoudre l'équation différentielle  $y'' + 2y' + y = 0$  (**1 pt**)
3. En déduire la solution générale de  $(E)$  (**1 pt**)
4. Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  satisfaisant aux conditions initiales  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$  (**2 pts**)

II. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} g(x) = x \ln(-x) - x + 1 & \text{si } x < 0 \\ g(x) = (-x^2 + x + 1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. a) Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$  (**2 pts**)  
b) Étudier les branches infinies (**2 pts**)
2. a) Étudier la continuité de  $g$  en 0 (**1 pt**)  
b) Étudier la dérivabilité de  $g$  en 0. Interpréter graphiquement le résultat. (**3 pts**)
3. a) Calculer  $g'(x)$  pour  $x < 0$  puis pour  $x > 0$ . (**1 pt**)  
b) Étudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation (**3 pts**)
4. a) Résoudre l'équation  $g(x) = 0$  pour  $x \in [0, +\infty[$  (**1 pt**)  
b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $] -\infty, 0[$ .  
Prouver que  $-4 < \alpha < -3$  (**2 pts**)  
c) En déduire le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}$  avec l'axe des abscisses. (**1 pt**)
5. Tracer  $\mathcal{C}$ . (**1 pt**)

III. 1. Justifier que  $g(x) = -2e^{-x} - 2g'(x) - g''(x)$  sur  $[0, +\infty[$  (Utiliser I) (**1 pt**)

2. En déduire une primitive  $G$  de  $g$  sur  $[0, +\infty[$  (**1 pt**)

3. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$ . (**2 pts**)